Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет радиоэлектроники
Кафедра 403

Разработка алгоритмов и программ решения алгебраических задач численными методами

Расчётно-графическая работа
по дисциплине «Информатика»

Выполнил:
студент группы М4О-103Б-17
Парамонов Н. М.

Принял:
преподаватель кафедры 403
Кошелькова Л. В.

Москва
2017 г.

Оглавление

1. Условие задачи

Вариант №79

Разработать схему алгоритма, составить Delphi-проект вычисления таблицы значений функции:

$$y(x,a,b)=\begin{cases}4b-e^{ax}, & \text{при } x<1\\ \dfrac{x^3}{\sqrt{ax+b^2}}, & \text{иначе}\end{cases}$$

Аргумент X принимает N значений от Xn с шагом Dx, а параметр A принимает значения от An до Ak с шагом Da. Параметр B принимает значение, численно равное интегралу:

$$\int_a^b x^2 e^x \cos^2(6x)\,dx$$

вычисленному при заданных пределах интегрирования $a = 0{,}26$ и $b = -55{,}24$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-3} \div 10^{-6}$.

2. Анализ задания

Входные данные:

1. Xn – начальное значение аргумента, тип – вещественный;
2. Dx – шаг изменения аргумента, тип – вещественный;
3. N – число значений аргумента, тип – целый;
4. An – начальное значение параметра A, тип – вещественный;
5. Ak – конечное значение параметра A, тип – вещественный;
6. Da – шаг изменения параметра A, тип – вещественный;
7. C – нижняя граница интегрирования, тип – вещественный;
8. D – верхняя граница интегрирования, тип – вещественный;
9. Eps – погрешность вычисления интеграла, тип – вещественный;
10. Km - максимальное количество итераций, тип – целый;

Выходные данные:

1. Mx – массив (одномерный) значений аргумента X, тип – вещественный;
2. My – массив (двумерный) значений функции Y, тип – вещественный;
3. Ma – массив (одномерный) значений параметра A, тип – вещественный;
4. B – численное значение интеграла, тип – вещественный;
5. Er – массив (двумерный) признака ошибки при вычислении функции, тип – целый;
6. Err – признак ошибки при вычислении определённого интеграла, тип – целый.

В алгоритме выполняются следующие функции:

1. Ввод исходных данных;
2. Вычисление значения определённого интеграла;
3. Вычисление таблицы значений функции;
4. Проверка значения подкоренного выражения и формирование признака ошибки, если оно имеет отрицательный знак;
5. Вывод результатов вычислений.

3. Теоретические сведения

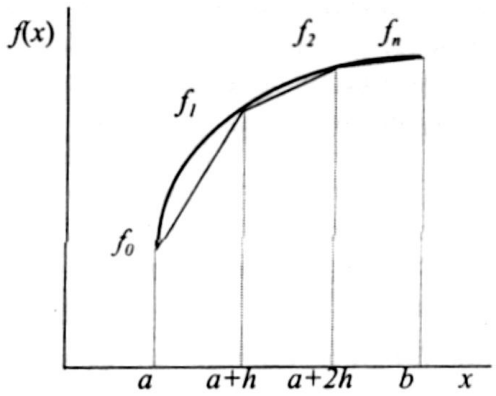
Метод трапеций для оценки определенного интеграла.

Величина определенного интеграла численно равна площади фигуры, образованной графиком функции и осью абсцисс (геометрический смысл определенного интеграла).

Следовательно, найти интеграл – это значит оценить площадь фигуры, ограниченной перпендикулярами, восстановленными к графику подынтегральной функции f(x) из точек a и b, расположенных на оси аргумента x.

Для решения задачи разобьем интервал [a, b] на n одинаковых участков. Длина каждого участка будет равна h=(b-a)/n (см. рис.).

$$\int_a^b f(x)dx$$



Восстановим перпендикуляры из каждой точки до пересечения с графиком функции f(x). Если заменить полученные криволинейные фрагменты графика функции отрезками прямых, то тогда приближенно площадь фигуры, а следовательно и величина определенного интеграла оценивается как площадь всех полученных трапеций. Обозначим последовательно значения подынтегральных функций на концах отрезков f0, f1, f2, ..., fn и подсчитаем площадь трапеций

$$S = \frac{f_0 + f_1}{2} \cdot h + \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot h + \frac{f_2 + f_3}{2} \cdot h + \ldots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} \cdot h =$$

$$= h\left(\frac{f_0}{2} + \frac{f_1}{2} + \frac{f_1}{2} + \frac{f_2}{2} + \frac{f_2}{2} + \frac{f_3}{2} + \ldots \frac{f_{n-1}}{2} + \frac{f_n}{2} \right) =$$

$$= h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} \right).$$

В общем случае формула трапеций принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f_i \right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} f_i \right),$$

где fi – значение подынтегральной функции в точках разбиения интервала (a,b) на равные участки с шагом h; f0, fn – значения подынтегральной функции соответственно в точках a и b.

Остаточный член пропорционален длине интервала [a,b] и квадрату шага h

$$R = -\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot f''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b].$$

Согласно рис. и формуле остаточного члена, точность вычисления определенного интеграла повышается с уменьшением шага h(увеличением числа отрезков n).

Метод трапеций можно реализовать в виде процедуры или даже функции, поскольку результат вычисления определенного интеграла – скалярная величина. Параметрами программного модуля являются границы интервала (a и b) и число шагов разбиения на малые интервалы n.

4. Схемы алгоритмов

В соответствии с принципами структурного программирования каждый функционально законченный фрагмент программы оформлен в виде подпрограммы. В результате программа включает главную программу и набор подпрограмм, предназначенных соответственно для табулирования функции (Tab), вычисления интеграла (Trap), вывода результатов выполнения программы (RezOut).

Схема алгоритма главной программы представлена на рис. 1, а таблица обозначения переменных главной программы – в табл. 1.
Главная программа начинается с ввода значений входных данных.

Таблица 1

Обозначение в задании	Обозначение в алгоритме	Наименование
Xn	Xn	Начальное значение аргумента, вещественный тип
Dx	Dx	Шаг изменения аргумента, вещественный тип
N	N	Число значений аргумента, целый тип
An	An	Начальное значение параметра A, вещественный тип
Ak	Ak	Конечное значение параметра A, вещественный тип
Da	Da	Шаг изменения параметра A, вещественный тип
C, D	C, D	Верхняя и нижняя границы интегрирования, вещественный тип
ε	Eps	Погрешность вычисления интеграла, вещественный тип
	Km	Максимальное количество итераций, целый тип
	Mx	Массив значений аргумента X, вещественный тип
	My	Массив значений функции Y, вещественный тип
	Ma	Массив значений параметра A, вещественный тип
B	B	Параметр функции, вещественный тип
	Er	Массив признака ошибки при вычислении функции, целый тип
	Err	Признак ошибки при вычислении определённого интеграла, целый тип
X	X	Аргумент, вещественный тип
Y	Y	Функция, вещественный тип
	Ka	Количество значений параметра A, целый тип
	I, J	Счётчики числа повторений циклов, целый тип

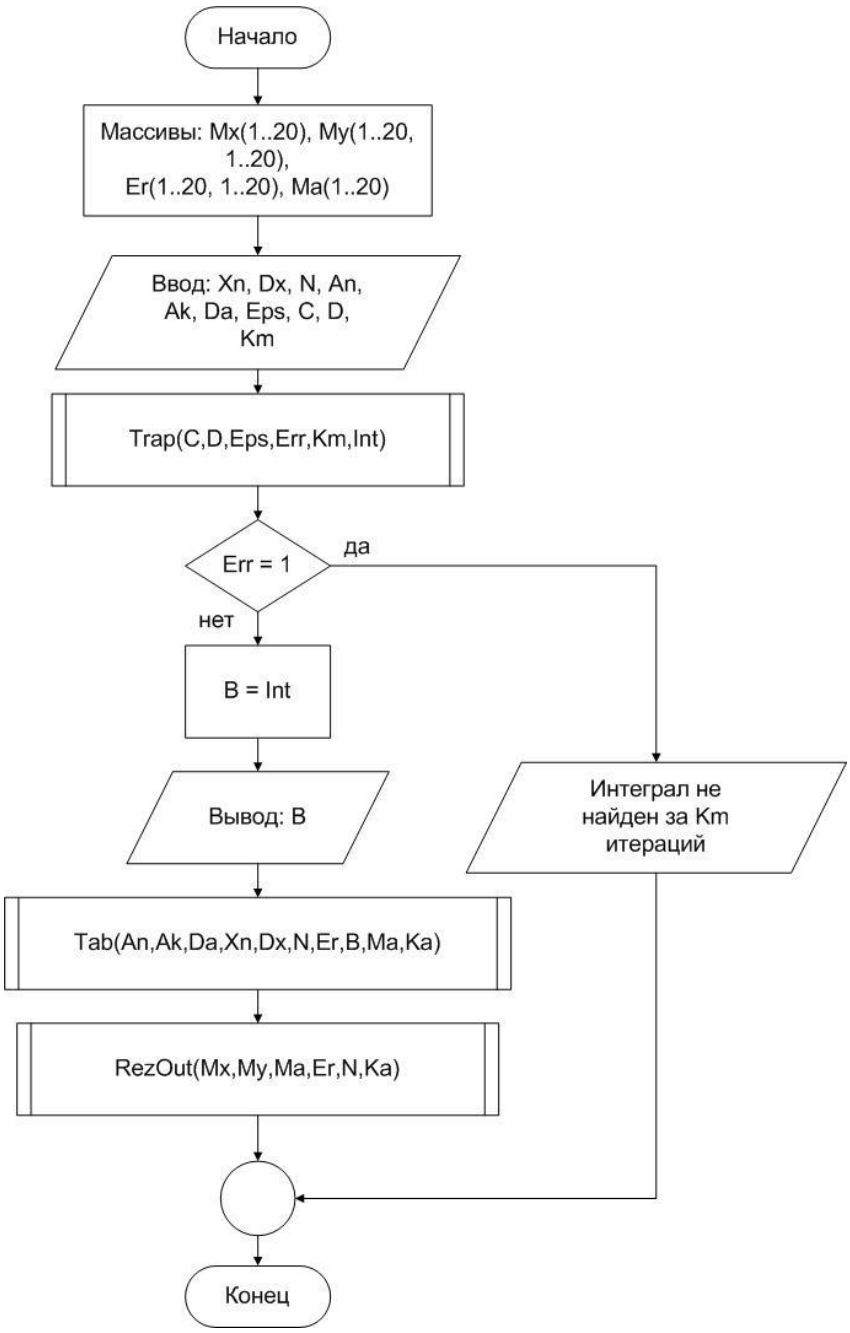


Рис. 1. Схема алгоритма главной программы

Вычисление значения определённого интеграла производится путём обращения к ПП **Trap**, формирующей также признак ошибки в случае, если значение интеграла не найдено за предельно допустимое число итераций Km. При Err = 1 выводится диагностическое сообщение «Интеграл не найден за Km итераций», иначе происходит табулирование функции (ПП **Tab**) и вывод результатов выполнения программы (ПП **RezOut**). Значение Ka определяет количество значений аргумента функции.

Схемы алгоритмов подпрограмм, используемых в данной программе, с указанием их назначения и списков формальных параметров приведены на рис. 2 – 5.

Подпрограмма-функция **F** (рис. 2) предназначена для вычисления значения подынтегральной функции, представляет собой один оператор присваивания и используется в ПП вычисления интеграла Trap.

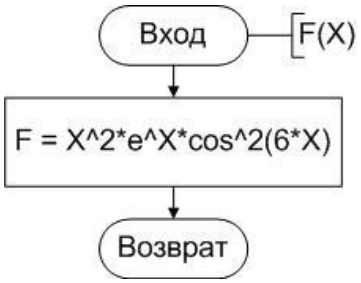


Рис. 2. Схема алгоритма подпрограммы-функции F

Подпрограмма-функция F предназначена для вычисления значения функции F.
Список формальных параметров: X.
Входные параметры:
X – аргумент функции, тип – вещественный.

Подпрограмма-процедура вычисления определённого интеграла **Trap** (рис. 3) реализуется циклом итерационного типа, который завершается при условии, что разность двух последовательных приближений меньше заданной погрешности (Del < Eps). Во избежание «зацикливания» программы при неудачном выборе начального приближения (или ошибках в данных) в алгоритме предусмотрено задание предельно допустимого количества повторений цикла Km и выполнение соответствующего арифметического цикла с проверкой окончания J <= Km.

Подпрограмма-процедура табулирования **Tab** (рис. 4), выполненная в виде двойного цикла, определяет функциональную зависимость вида Y = f(X) при различных значениях параметров, поэтому внутренний цикл должен быть связан с изменением аргумента X, а внешний – с изменением параметра A. Во внутреннем цикле имеются две развилки: одна из них обусловлена тем, что функция задаётся разными формулами на разных участках изменения аргумента (проверка условия X < 1), вторая – проверяет знак подкоренного выражения и при условии $A*X+B^2 > 0$ вычисляет значение функции, в противном случае – формирует признак ошибки Er[I, J] = 1.

Подпрограмма-процедура **RezOut** (рис. 5) выводит результаты выполнения программы. По структуре она построена аналогично подпрограмме Tab: представляет собой двойной цикл арифметического типа, но в отличие от ПП Tab она получает количество значений параметра A в качестве входных данных.

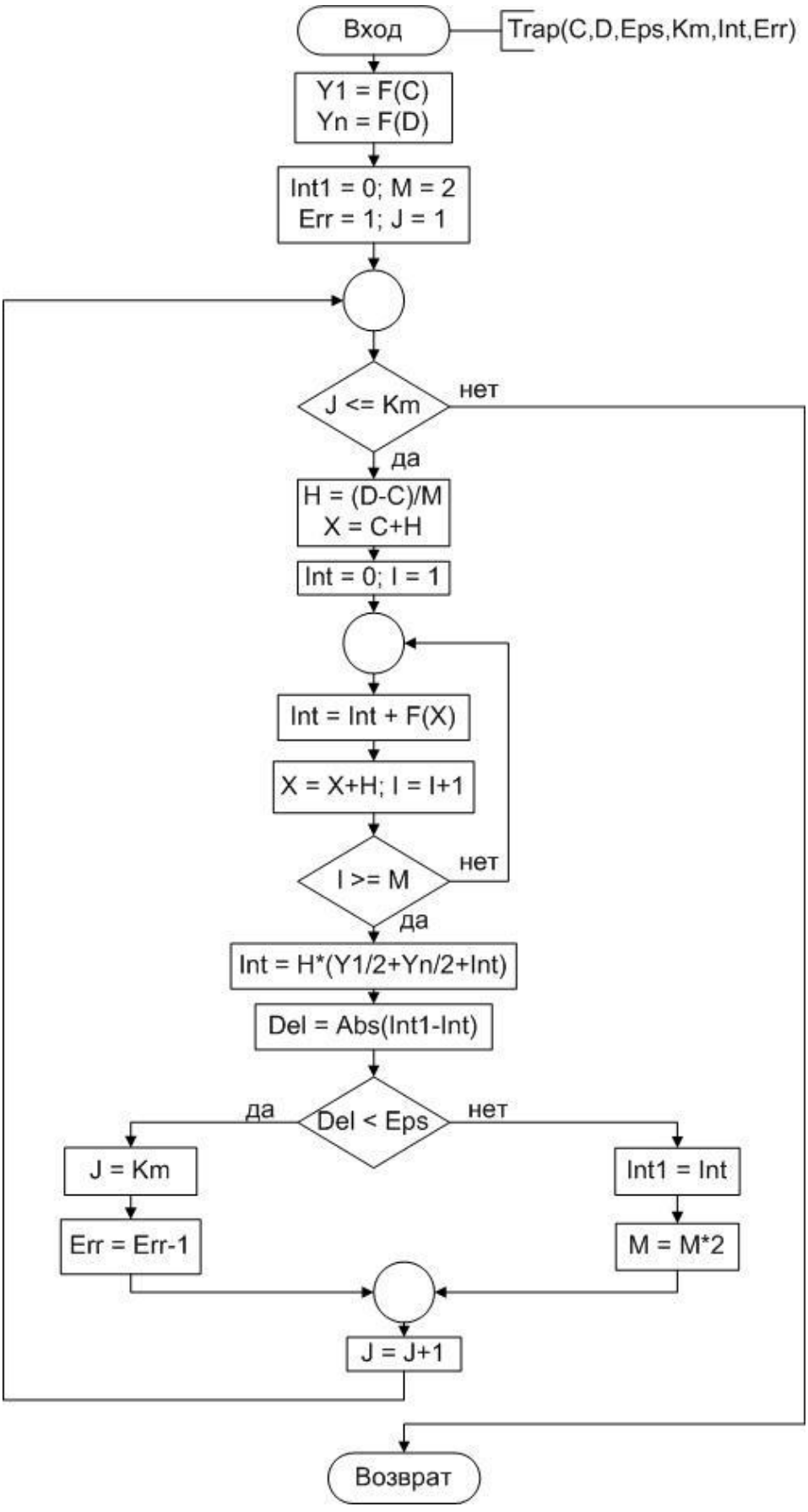


Рис. 3. Схема алгоритма подпрограммы-процедуры Trap

Подпрограмма-процедура Trap предназначена для вычисления значения определённого интеграла с заданной погрешностью методом трапеций.

Список формальных параметров: C, D, Eps, Km, Int, Err.

Входные параметры:

C, D – пределы интегрирования, тип – вещественный;

Eps – погрешность вычисления интеграла, тип – вещественный;

Km – предельно допустимое количество итераций, тип – целый.

Выходные параметры:

Int – значение интеграла, тип – вещественный;

Err – признак ошибки, тип – целый.

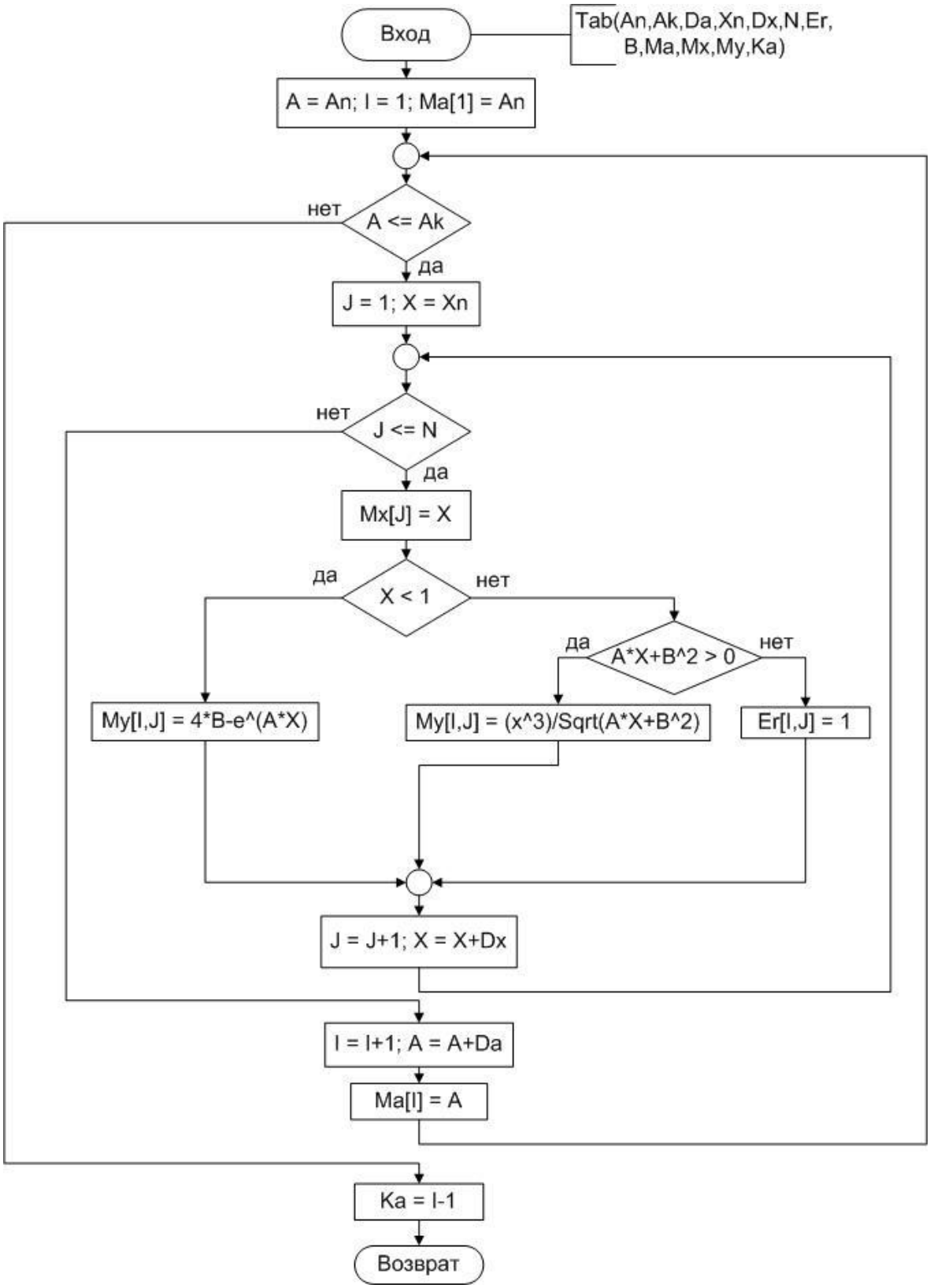


Рис. 4. Схема алгоритма подпрограммы-процедуры Tab

Подпрограмма-процедура Tab предназначена для вычисления таблицы значений функции Y.
Список формальных параметров: An, Ak, Da, Xn, Dx, N, B, Er, Mx, My, Ma, Ka.
Входные параметры:

An – начальное значение параметра A, тип – вещественный;
Ak – конечное значение параметра A, тип – вещественный;
Da – шаг изменения параметра A, тип – вещественный;
Xn – начальное значение аргумента, тип – вещественный;
Dx – конечное значение аргумента, тип – вещественный;
N – количество значений аргумента, тип – целый;
B – параметр функции, тип – вещественный.

Выходные параметры:

Er – массив признака ошибки, тип – целый;
Mx – массив значений аргумента X, тип – вещественный;
My – массив значений функции Y, тип – вещественный;
Ma – массив значений параметра A, тип – вещественный;
Ka – количество значений параметра A, тип - целый.

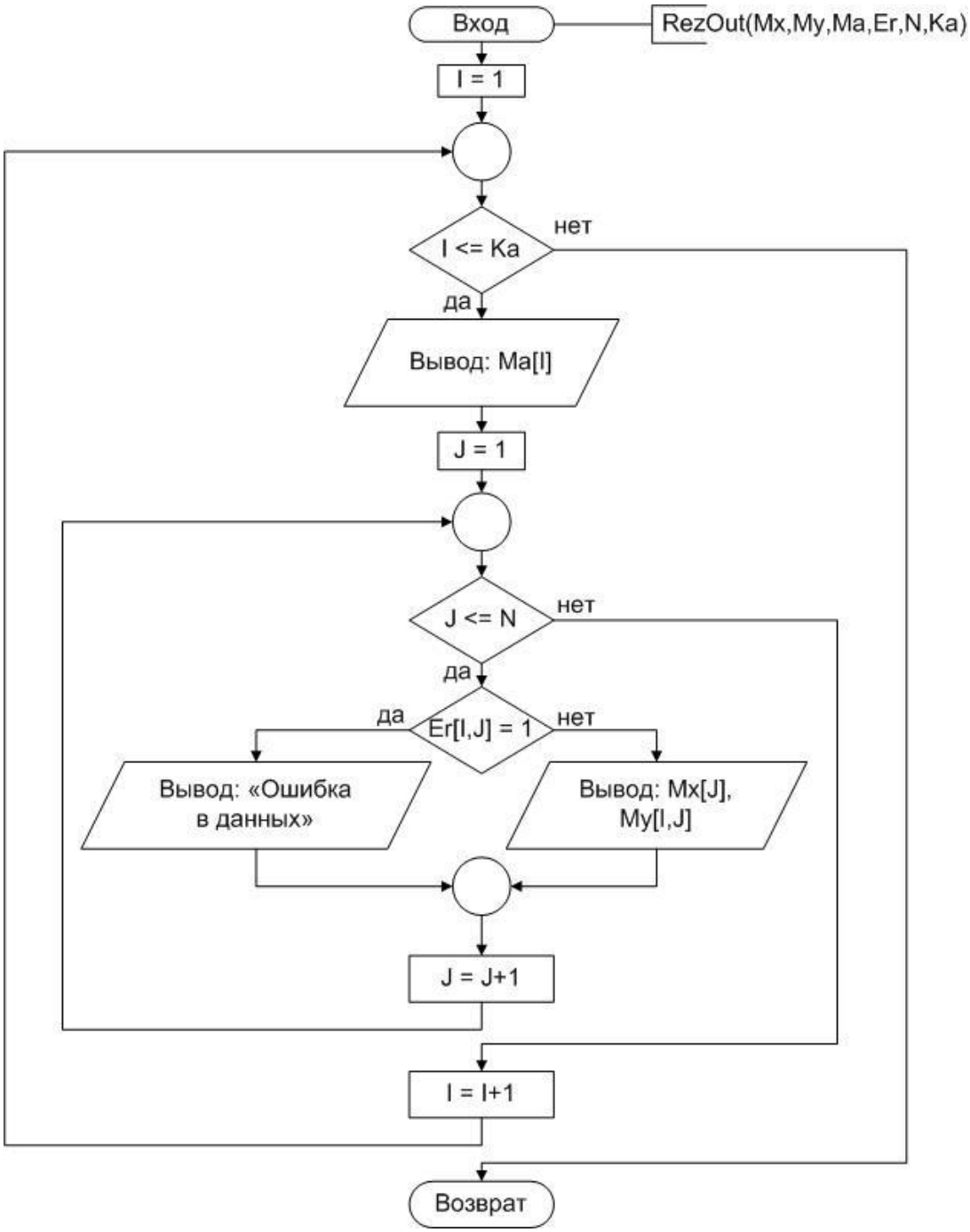


Рис. 5. Схема алгоритма подпрограммы-процедуры RezOut

Подпрограмма-процедура RezOut предназначена для вывода результатов выполнения программы на внешние носители информации.
Список формальных параметров: Mx, My, Ma, Er, N, Ka.
Входные параметры:

Mx – массив значений аргумента X, тип – вещественный;
My – массив значений функции Y, тип – вещественный;
Ma – массив значений параметра A, тип – вещественный;
Er – массив признака ошибки, тип – целый;
N – количество значений аргумента, тип – целый;
Ka – количество значений параметра A, тип - целый.

5. Описание Delphi-программы

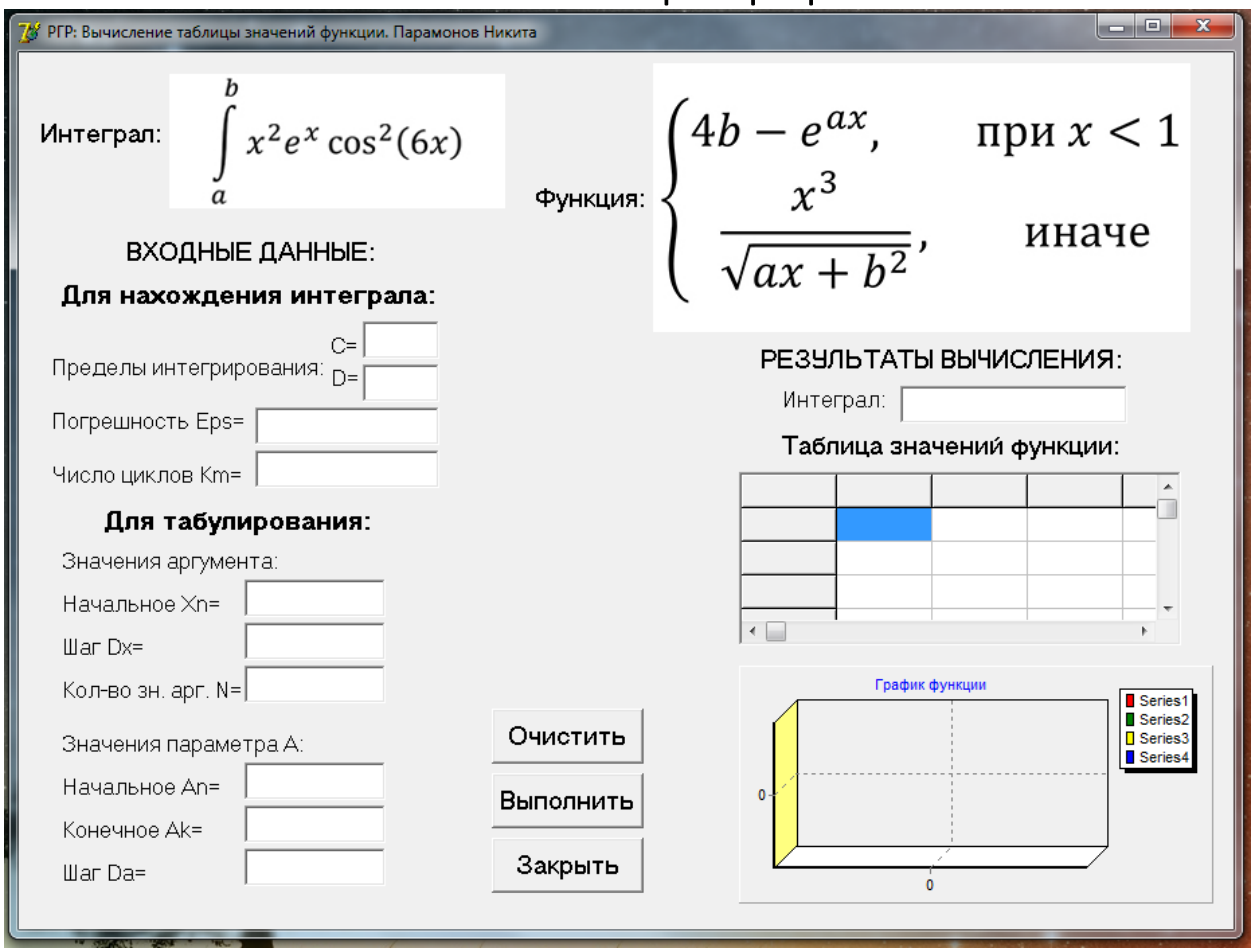


Рис. 6. Форма Delphi-приложения

Разработка приложения в визуальной среде программирования Delphi включает два этапа:

- разработка интерфейса приложения;
- определение функциональности приложения, т.е. написание кода.

Интерфейс определяет способ взаимодействия пользователя и приложения, т.е. внешний вид формы при выполнении приложения и то, каким образом пользователь управляет приложением.

Разработка интерфейса состоит в создании главного окна, т.е. в расположении на форме необходимых компонентов редактирования, отображения и управления. Внешний вид формы для задачи табулирования функции представлен на рисунке 6. На форме расположены следующие визуальные компоненты: Label, Edit, Button, StringGrid, Chart, Image.

Функциональность приложения определяется процедурами, которые выполняются при возникновении определенных событий. Структура Delphi-проекта соответствует рассмотренным в предыдущем разделе схемам алгоритмов, но дополнительно включает процедуры или функции преобразования данных символьного типа в арифметические при вводе и обратного преобразования арифметических данных в строковые – при выводе. Текст модуля формы представлен в следующем пункте.

Обработчик кнопки «Выполнить» по событию OnClick реализует процедуры (Trap, Tab, RezOut), необходимые для выполнения задачи. Обработчик включает в себя: функции преобразования входных данных типа String, полученных из компонентов Edit, в вещественные числа типа real или целые числа типа integer; вызов процедур Trap, Tab, RezOut; заполнение таблицы StringGrid – вывод данных; функции преобразования выходных данных типа real (значение интеграла) в данные типа String для вывода в компонент Edit; вывод сообщений об ошибках, если они присутствуют; вывод графика с использованием компонента Chart.

Обработчик кнопки «Очистить» по событию OnClick включает в себя: очистку компонентов Edit, используемых для получения входных (выходных – для значения интеграла) данных, очистку серий компонента Chart, очистку компонента StringGrid в цикле.

Обработчик кнопки «Закрыть» по событию OnClick включает в себя метод Close, обеспечивающий закрытие приложения.

6. Текст программы

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, TeeProcs, TeEngine, Chart, Grids, Series,
  jpeg;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label5: TLabel;
    Label6: TLabel;
    Label7: TLabel;
    Label8: TLabel;
    Label9: TLabel;
    Label10: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Edit2: TEdit;
    Label11: TLabel;
    Edit3: TEdit;
    Label12: TLabel;
    Edit4: TEdit;
    Label13: TLabel;
    Label14: TLabel;
    Label15: TLabel;
    Edit5: TEdit;
    Label16: TLabel;
    Edit6: TEdit;
    Label17: TLabel;
    Edit7: TEdit;
```

```
    Label18: TLabel;
    Label19: TLabel;
    Edit8: TEdit;
    Label20: TLabel;
    Edit9: TEdit;
    Label21: TLabel;
    Edit10: TEdit;
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    Button3: TButton;
    StringGrid1: TStringGrid;
    Label22: TLabel;
    Chart1: TChart;
    Label23: TLabel;
    Edit11: TEdit;
    Series1: TLineSeries;
    Image1: TImage;
    Image2: TImage;
    Series2: TLineSeries;
    Series3: TLineSeries;
    Series4: TLineSeries;
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;

implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);  //Кнопка "Закрыть"
begin
  close;
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);  //Кнопка "Очистить"
var I,J: integer;
begin
  Edit1.Text := '';
  Edit2.Text := '';
  Edit3.Text := '';
  Edit4.Text := '';

  Edit5.Text := '';
  Edit6.Text := '';
  Edit7.Text := '';
  Edit8.Text := '';
  Edit9.Text := '';
  Edit10.Text := '';
  Edit11.Text := '';
  for I := 0 to 20 do
    for J := 0 to 20 do
      Form1.StringGrid1.Cells[I,J] := '';
  for I := 0 to 3 do Form1.Chart1.Series[I].Clear;
end;
```

```
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);  // Кнопка "Вычислить"
const Nmax = 20;
type
  Tmy = Array[1..Nmax, 1..Nmax] of real;
  Tmx = Array[1..Nmax] of real;
var
  My, Er: Tmy;
  Mx, Ma: Tmx;
  Xn,Dx,An,Ak,Da,Eps,C,D,Int,B: real;
  N,Km,Err,Ka: integer;

procedure Trap(C,D,Eps:real; Km:integer; var Int:real; var Err:integer); //Процедура вычисления интеграла
function F(X: real): real;
begin
  F := X*X*Exp(X)*cos(6*X)*cos(6*X);
end;
var
  Y1,Yn,Int1,X,H,Del: real;
  M,I,J: integer;
begin
  Y1 := F(C);
  Yn := F(D);
  Int1 := 0;
  M := 2;
  Err := 1;
  J := 1;
  while J <= Km do
  begin
    H := (D-C)/M;
    X := C + H;
    Int := 0;
    repeat
      Int := Int + F(X);
      X := X + H;
      I := I + 1;
    until I >= M;
    Int := H*(Y1/2 + Yn/2 + Int);
    Del := Abs(Int1-Int);
    if Del < Eps then
    begin
      J := Km;
      Err := Err - 1;
    end
    else
    begin
      Int1 := Int;
      M := M*2;
    end;
    J := J + 1;
  end;
end;

procedure Tab(An,Ak,Da,Xn,Dx,B:real; N:integer; var My, Er: Tmy; var Mx, Ma: Tmx; var Ka: integer);
//Процедура табулирования функции
var
  A,X :real;
  I,J:integer;
begin
  A := An;
  I := 1;
  while A <= Ak do
  begin
    X := Xn;
```

```
    for J := 1 to N do
    begin
      Mx[J] := X;
      if x < 1 then My[I,J] := 4*B-exp(A*X)
        else
          if A*X+B*B > 0 then My[I,J] := (x*x*x)/(sqrt(A*X+B*B))
            else Er[I,J] := 1;
      X := X + Dx;
    end;
    Ma[I] := A;
    I := I + 1;
    A := A + Da;
  end;
  Ka := I-1;
end;

procedure RezOut(var Mx,Ma: Tmx; var My,Er: Tmy; Ka,N:integer); //Процедура вывода результатов
var
  I,J:integer;
begin
  //Формирование заголовков таблицы
  StringGrid1.Cells[0,0] := 'X/A';
  for I := 1 to Ka do
  begin
    StringGrid1.Cells[I,0]:=('A['+IntToStr(I)+']='+FloatToStr(Ma[I]));
    Form1.Chart1.Series[I-1].Title:='A['+IntToStr(I)+']';
    Form1.Chart1.Series[I-1].Clear;
    for J := 1 to N do
    begin
      with Form1.StringGrid1 do
      begin
        Cells[0,J]:=('X['+IntToStr(J)+']='+FloatToStr(Mx[J]));
        if Er[I,J] = 1 then Cells[I,J]:= 'Err' else Cells[I,J]:=FloatToStrF(My[I,J],ffGeneral,6,5);
      end;
        Form1.Chart1.Series[I-1].AddXY(Mx[J],My[I,J]);
    end;
  end;
end;

begin
  //Исходные данные для вычисления интеграла
  C:= StrToFloat(Edit1.Text);
  D:= StrToFloat(Edit2.Text);
  Eps:= StrToFloat(Edit3.Text);
  Km:= StrToInt(Edit4.Text);
  //Исходные данные для табулирования
  Xn:= StrToFloat(Edit5.Text);
  Dx:= StrToFloat(Edit6.Text);
  N:= StrToInt(Edit7.Text);
  An:= StrToFloat(Edit8.Text);
  Ak:= StrToFloat(Edit9.Text);
  Da:= StrToFloat(Edit10.Text);
  Trap(C,D,Eps,Km,Int,Err);
  if Eps >= 1 then
    begin
      ShowMessage('Погрешность Eps должна быть < 1');
      exit;
    end
  else
  if Err = 1 then
  begin
    ShowMessage('Интеграл не найден за '+IntToStr(Km)+' итераций');
    exit;
```

```
  end
  else
  begin
    B := Int;
    Edit11.Text := FloatToStrF(B,ffGeneral,10,6);
    Tab(An,Ak,Da,Xn,Dx,B,N,My,Er,Mx,Ma,Ka);
    RezOut(Mx,Ma,My,Er,Ka,N);
  end;
end;

end.
```

7. Пример выполнения программы:

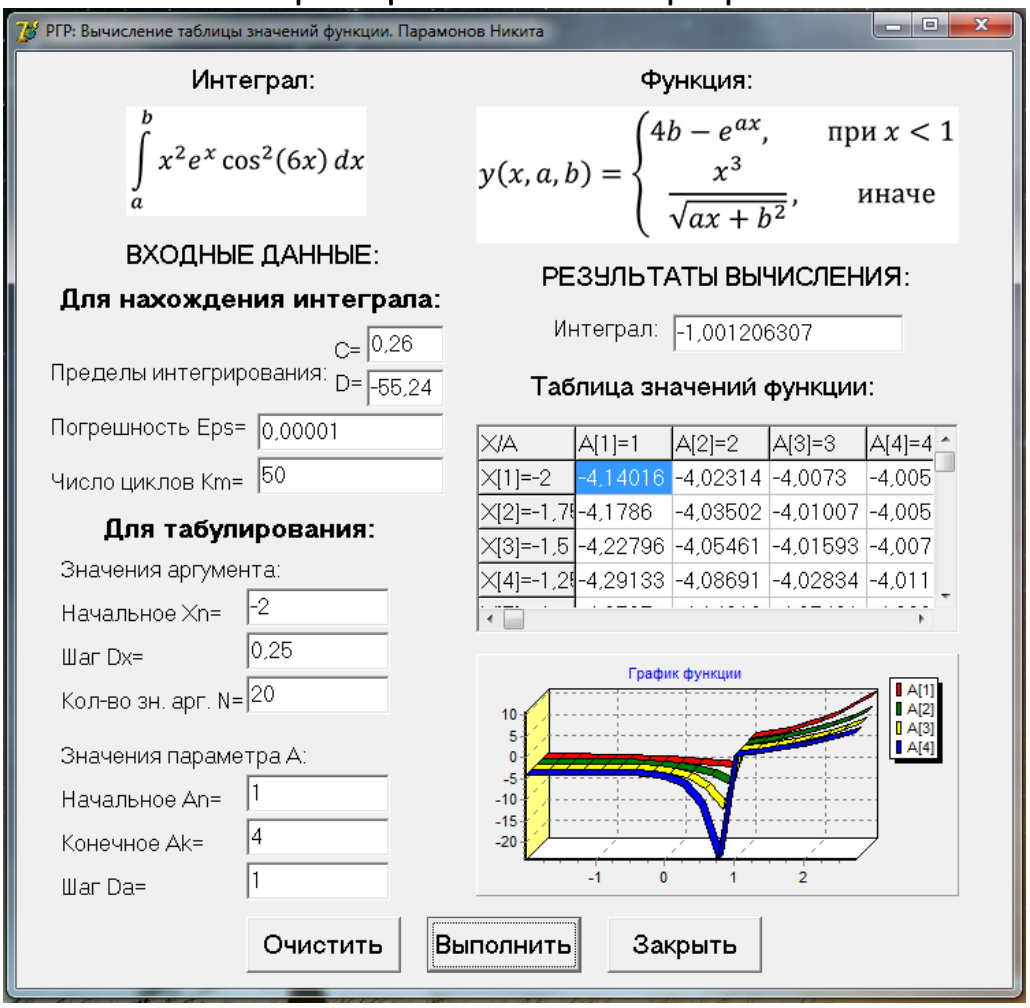


Рис. 7. Форма Delphi-приложения с результатами выполнения программы

8. Набор тестов

Для проверки правильности алгоритмов составим тесты для всех возможных путей вычислений и выполним контрольные просчеты пользуясь независимыми от Delphi-среды вычислительными средствами (Калькулятор, WolframAlpha и др.). В данном случае воспользуемся системой «WolframAlpha».

Тест 1. *Проверка правильности вычисления определённого интеграла.*
Пусть входные данные имеют следующие значения: C=0,26; D=-55,24; Eps=0,00001; Km=50. Результат вычисления Delphi-приложения показан на рис. 7 и равен -1,001206307. Результат вычисления в WolframAlpha показан на рис. 8 и равен -1,00121, а значит при погрешности Eps=0,00001 результат верен.

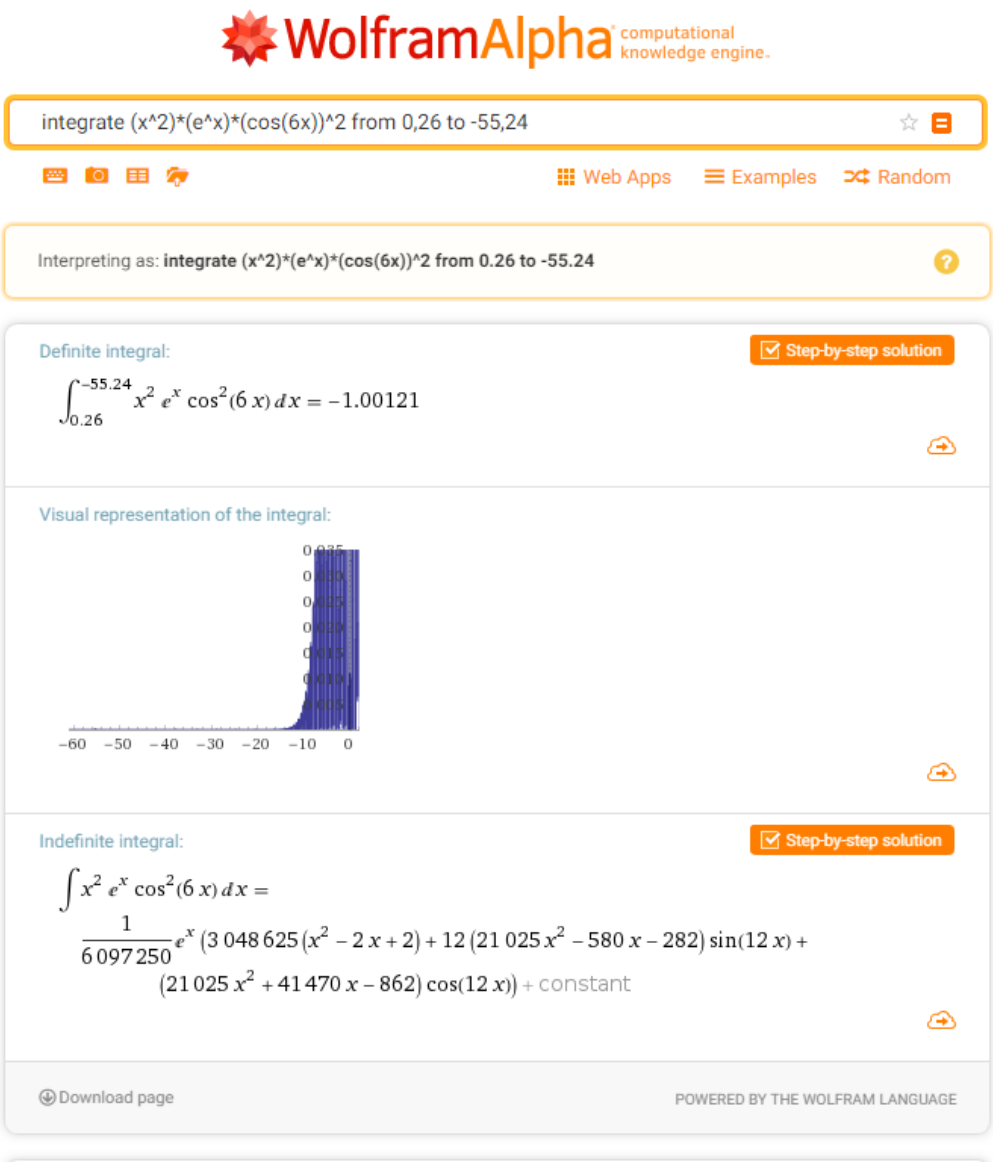


Рис. 8. Результат вычисления интеграла в WolframAlpha

Тест 2. *Проверка ветви, вычисляющей значение функции при X < 1.*
Пусть входные данные имеют следующие значения: C=0,26; D=-55,24; Eps=0,00001; Km=50; X=-2; A=1. Результат вычисления Delphi-приложения показан на рис. 7 и равен -4,14016. Результат вычисления в WolframAlpha показан на рис. 9 и равен -4,14014. Следовательно, значение функции при таких входных параметрах вычислено правильно.

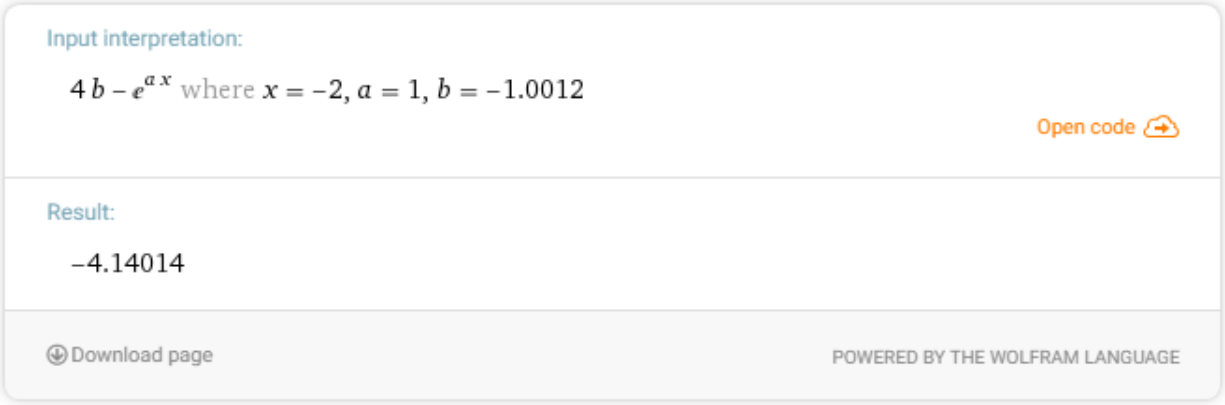


Рис. 9. Результат вычисления функции при X=-2 и A=1 в WolframAlpha

Тест 3. *Проверка ветви, вычисляющей значение функции при X >= 1.*
Пусть входные данные имеют следующие значения: C=0,26; D=-55,24; Eps=0,00001; Km=50; X=2,5; A=2. Результат вычисления Delphi-приложения равен 6,3776. Результат вычисления в WolframAlpha показан на рис. 10 и равен 6,3776. Следовательно, значение функции при таких входных параметрах вычислено правильно.

Рис. 10. Результат вычисления функции при X=2,5 и A=2 в WolframAlpha

При вводе неверных значений Delphi-программа выводит сообщение об ошибке.

При недостаточном числе итераций Km выводится сообщение об ошибке (рис. 11):

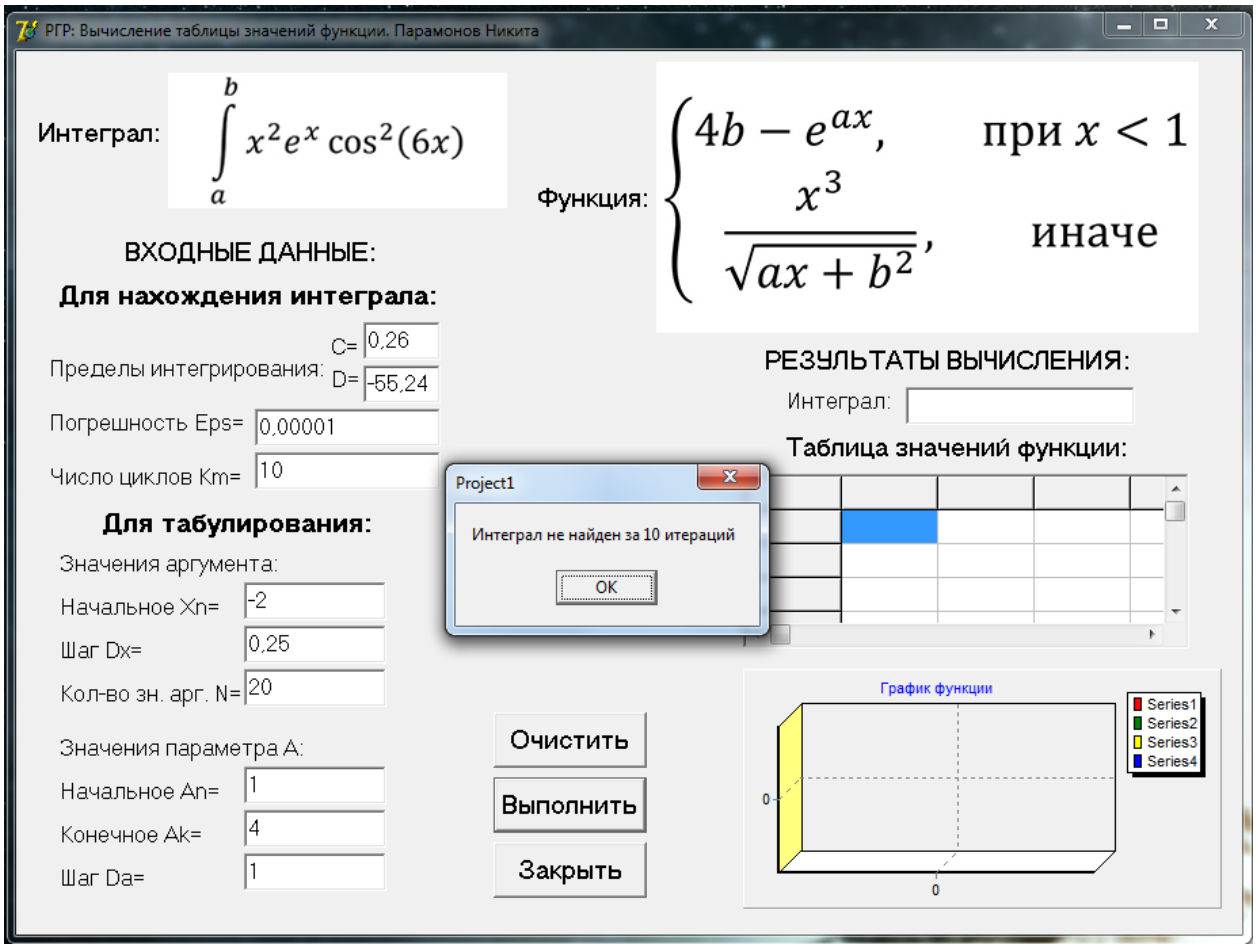


Рис. 11. Сообщение об ошибке при недостаточном числе итераций

Сообщение об ошибке также выводится при погрешности Eps большей или равной 1(рис. 12):

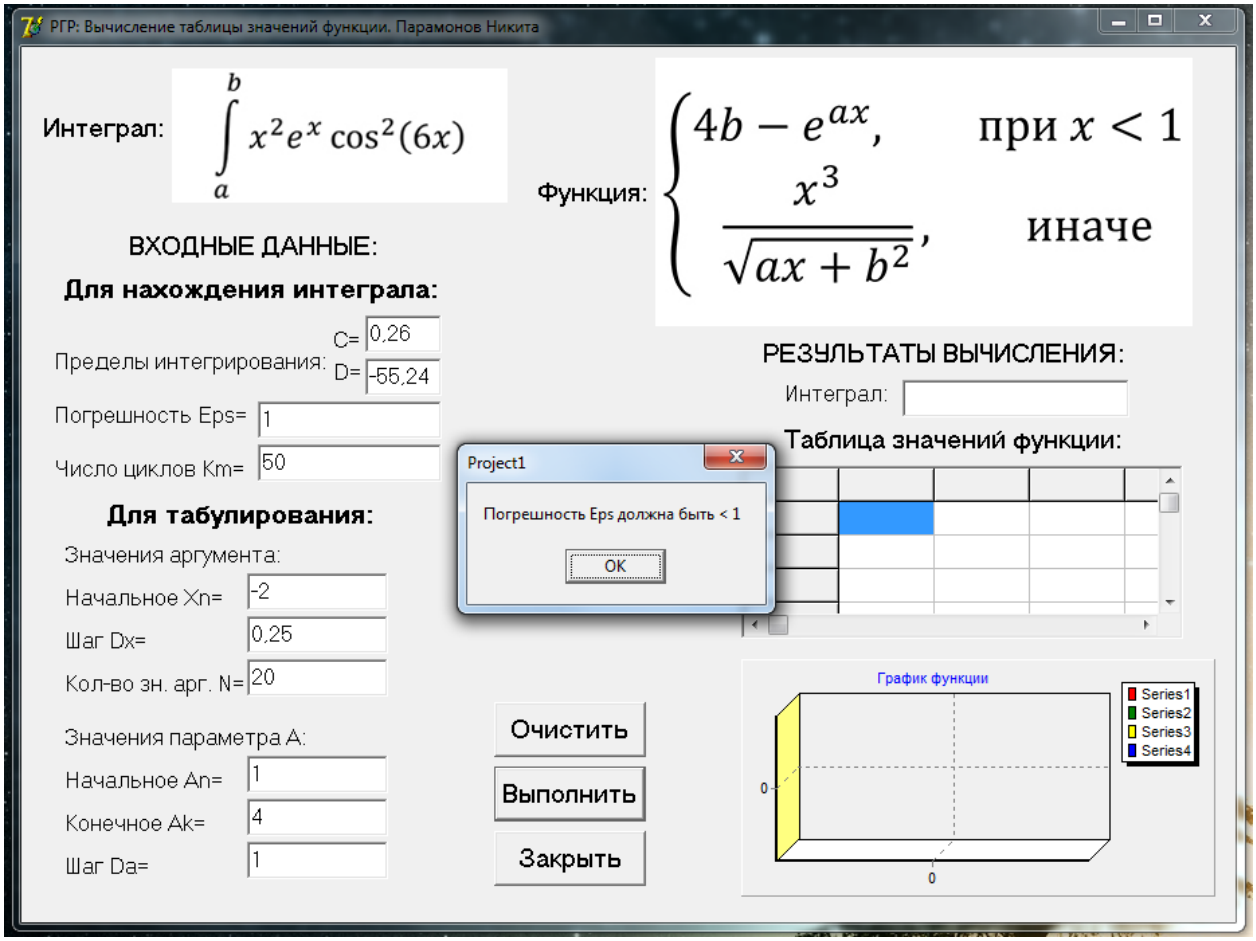


Рис. 12. Сообщение об ошибке при погрешности Eps большей или равной 1

Если при определённых значениях аргумента X и параметра A подкоренное выражение становится меньше 0, программа выводит строку «Err» в таблице значений функции (рис. 13), сообщающую о наличии ошибки в вычислениях (выход за область определения функции):

Рис. 13. Ошибка в вычислениях, если подкоренное выражение меньше 0

9. Выводы

Анализ распечатки результатов выполнения программы показывает, что полученные значения функции приближенно совпадают с результатами, полученными для контрольных тестовых примеров с помощью WolframAlpha, что подтверждает

работоспособность программы. Следовательно, программа правильно вычисляет заданную функцию по всем ветвям алгоритма и может быть использована для других значений аргументов и параметров функции.

10. Список использованной литературы

- Учебное пособие «Решение алгебраических задач численными методами в среде Delphi» Авторы: Л.В. Кошелькова, А.И. Заковряшин
- Учебное пособие «Программное обеспечение, алгоритмизация и программирование». Авторы: Ю.И. Волощенко, Л.В. Кошелькова
- Онлайн справочник "Основы Delphi" (http://delphibasics.ru/)